ОЩЕ ЕДНО ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА НА МАРИОН

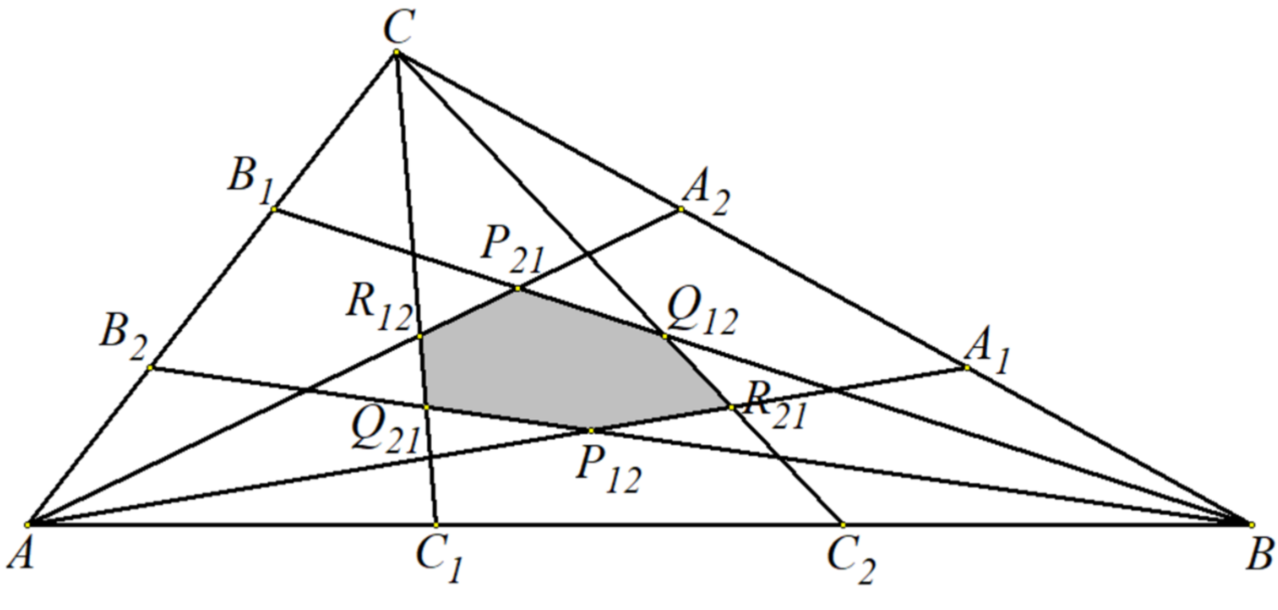
Сава Гроздев, Веселин Ненков, Татяна Маджарова

Резюме. *Теоремата на Марион се отнася за специално конструиран шестоъгълник в равнината на даден триъгълник. Едно обобщение на тази теорема е показано в [5], което от своя страна е обобщено в настоящия материал. Обобщенията, както и оригиналът, са получени с помощта на програмата Geometer's Sketchpad.*

Ключови думи: триъгълник, пресечни точки, GSP.

Формулировка на теоремата на Марион

Използването на информационните технологии в образованието и изследването на различни научни въпроси вече се е превърнало в основен инструмент. Един от тези инсрументи е програмата Geometer's Sketchpad (GSP) [3, 4, 7, 9]. Едно от първите твърдения забелязани с GSP се нарича теорема на Марион [10, 11, 13], която е установена през 1993 г. от американската математичка Марион Уолтър (Marion Walter). За коректното формулираме на тази теорема ще са ни необходими следващите означения.



Фигура 1.

Нека ABC е произволен триъгълник с лице S. Двойките точки $(A_1,\ A_2)$,

(B_1, B_2) и (C_1, C_2) делят съответно страните BC, CA и AB по на три равни части, като A_1 е между B и A_2, B_1 е между C и B_2 и C_1 е между A и C_2 (Фиг. 1). Въвеждаме още следните означения: $AA_1 \cap BB_2 = P_{12}$, $AA_2 \cap BB_1 = P_{21}$, $BB_1 \cap CC_2 = Q_{12}$, $BB_2 \cap CC_1 = Q_{21}$, $CC_1 \cap AA_2 = R_{12}$, $CC_2 \cap AA_1 = R_{21}$ (Фиг. 1). При така въведените означения е изпълнена следната

Теорема на Марион. *Лицето на шестоъгълника $P_{12}R_{21}Q_{12}P_{21}R_{12}Q_{21}$ е равно на $\frac{1}{10}S$.*

По-нататък чрез използване на екперименти с GSP ще получим едно обобщение на теоремата на Марион.

Обобщение на теоремата на Марион

Както е отбелязано в [5], известни са някои обобщения на теоремата на Марион. Едно от тях е на Luca Goldoni [12]. Друго обобщение, наречено теорема на Морган (Morgan), се свързва с разделяне на страните на равни части, където е нечетно число [13]. Трето обобщение е описано в [5].

Тук ще разгледаме обобщение на обобщението, представено в [5]. За целта двойките точки (A_1, A_2), (B_1, B_2) и (C_1, C_2) делят съответно страните BC, CA и AB по следния начин:

$$\vec{BA_1} = \frac{1}{n}\vec{BC}, \quad \vec{CA_2} = \frac{1}{m}\vec{CB}, \quad \vec{CB_1} = \frac{1}{n}\vec{CA},$$
$$\vec{AB_2} = \frac{1}{m}\vec{AC}, \quad \vec{AC_1} = \frac{1}{n}\vec{AB} \quad \vec{BC_2} = \frac{1}{m}\vec{BA},$$

където n и m са произволни реални положителни числа (Фиг. 2).

Шестоъгълниците $P_{12}R_{21}Q_{12}P_{21}R_{12}Q_{21}$ се конструират за всички n и m по същия начин, както по-горе. Затова за всяко n съответният шестоъгълник $P_{12}R_{21}Q_{12}P_{21}R_{12}Q_{21}$ ще наричаме *шестоъгълник на Марион.* Ако $n = m = 3$, получаваме оригиналният шестоъгълник на Марион (Фиг. 1).

След извършване на известни експерименти с GSP установяваме, че лицето $\bar{S}$ на шестоъгълника $P_{12}R_{21}Q_{12}P_{21}R_{12}Q_{21}$ и лицето S на $\triangle ABC$ са свързани с равенство, което формулираме чрез следващата теорема.

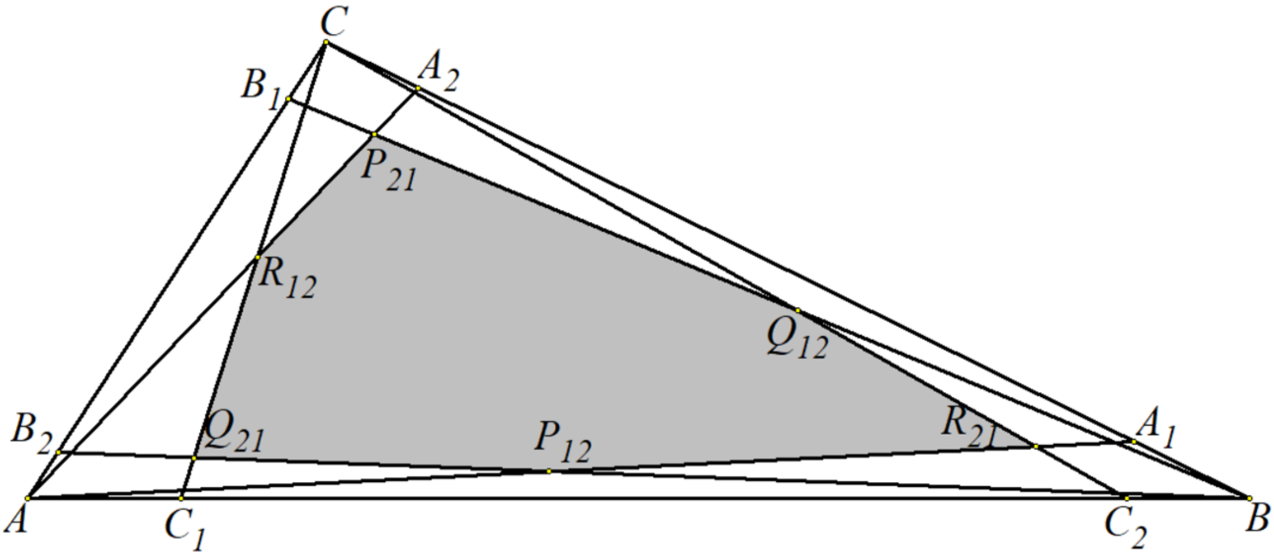
Теорема.

$$\bar{S} = \frac{m^2n + mn^2 - 3m^2 - 3n^2 - 4mn + 8m + 8n - 8}{(m+n-1)(mn-1)}S.$$

Доказателство на теоремата

Строгото обосноваване на един геометричен факт може да се извърши по различни начини [2, 4, 8]. Тук ще използваме барицентрични координати спрямо $\triangle ABC$, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ [6]. От условията, на които са подчинени двойките точки $(A_1,\ A_2)$, $(B_1,\ B_2)$ и $(C_1,\ C_2)$, получаваме координатните представяния:

$$A_1\left(0,\frac{n-1}{n},\frac{1}{n}\right),\quad A_2\left(0,\frac{1}{m},\frac{m-1}{m}\right),\quad B_1\left(\frac{1}{n},0,\frac{n-1}{n}\right),$$
$$B_2\left(\frac{m-1}{m},0,\frac{1}{m}\right),\quad C_1\left(\frac{n-1}{n},\frac{1}{n},0\right),\quad C_2\left(\frac{1}{m},\frac{m-1}{m},0\right).$$



Фигура 2.

От тези координати определяме параметричните уравнения на правите AA_1, BB_1, CC_1, AA_2, BB_2, CC_2, от които намираме следващите координатни представяния:

$$P_{12}\left(\frac{m-1}{m+n-1},\frac{n-1}{m+n-1},\frac{1}{m+n-1}\right),$$
$$P_{21}\left(\frac{m-1}{mn-1},\frac{n-1}{mn-1},\frac{(m-1)(n-1)}{mn-1}\right),$$
$$Q_{12}\left(\frac{1}{m+n-1},\frac{m-1}{m+n-1},\frac{n-1}{m+n-1}\right),$$
$$Q_{21}\left(\frac{(m-1)(n-1)}{mn-1},\frac{m-1}{mn-1},\frac{n-1}{mn-1}\right),$$

$$R_{12}\left(\frac{n-1}{m+n-1},\frac{1}{m+n-1},\frac{m-1}{m+n-1}\right),$$
$$P_{21}\left(\frac{n-1}{mn-1},\frac{(m-1)(n-1)}{mn-1},\frac{m-1}{mn-1}\right).$$

Ако лицата на триъгълниците $P_{12}R_{21}Q_{12}$, $P_{21}R_{12}Q_{12}$, $P_{12}R_{12}Q_{21}$ и $P_{12}Q_{12}R_{12}$ са съответно S_1, S_2, S_3 и S_4, от горните координати се получава

$$S_1=S_2=S_3=\frac{\left(m^2-2m-n+2\right)\left(n^2-2n-m+2\right)}{(m+n-1)^2\,(mn-1)}S,$$
$$S_4=\frac{m^2+n^2-mn-2m-2n+4}{(m+n-1)^2}S.$$

Сега лесно се вижда, че

$$\bar{S}=S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{m^2n+mn^2-3m^2-3n^2-4mn+8m+8n-8}{(m+n-1)(mn-1)}S.$$

С това теоремата е доказана.

Заключение

От представеното изложение се забелязва, че ако се вникне по различен начин в оригиналната теорема на Марион, могат да се получат различни нейни обобщения. В обобщението представено в [5] е получена и специална елипса, която е вписана в шестоъгълника на Марион $P_{12}R_{21}Q_{12}P_{21}R_{12}Q_{21}$. В общия случай се оказва, че такава елипса не съществува. От едно по-общо твърдение следва, че в $P_{12}R_{21}Q_{12}P_{21}R_{12}Q_{21}$ може да се впише елипса точно когато $n=m$.

Литература

[1] М. Георгиева, С. Гроздев, *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*, Изток-Запад, София, 2016, ISBN: 987-619-152-869-1

[2] С. Гроздев, *Европейско кенгуру*, СМБ, София, 2005.

[3] С. Гроздев, Методология и информационные технологии в образовании, *Материалы Международного круглого стола "Современные технологии преподавания естественно-научных и гуманитарных дисциплин*, София, 2008, 17–22

[4] В. Ненков, *Повишаване на математически компетенции с динамична геометрия*, Архимед София, 2020, ISBN: 978-954-779-291-3

[5] В. Ненков, Шестоъгълници на Марион и елипси, *Сборник с доклади на Юбилейната международна научна конференция „Синергетика и рефлексия в обучението по математика“*, посветена на 75 г. на проф. Сава Гроздев, 22–24 октомври, 2025 г., Пампорово, България, 107–114

[6] Г. Паскалев, И. Чобанов, *Забележителни точки в триъгълника*, Народна просвета, София, 1985

[7] Т. Сергеева, М. Шабанова, С. Гроздев, *Основи динамической геометрии*, АСОУ, Москва, 2014

[8] S. Grozdev, *For High Achievements in Mathematics: The Bulgaria Experience (Theory and Practice)*, ADE, Sofia, 2007, ISBN: 978-954-92139-1-1

[9] E. Koleva, N. Baeva, A Comparative Analysis of Assessment Results From Face-To-Face and Online Exams, *Mathematics and Informatics*, 2022, 4, 335–343

[10] R. Morgan, "No Restriction Needed. The Mathematics", Teacher 87, 726 and 743, 1994

[11] M. Maushard, From the Baltimore Sun, Clipped from the Arkansas Democrat-Gazette 12/21/94

[12] `https://www.researchgate.net/publication/301284954_A_GENERALIZATION_OF_MARION_WALTER'S_THEOREM` (последно влизане на 15.09.25)

[13] `https://mathworld.wolfram.com/MarionsTheorem.html` (последно влизане на 15.09.25)

Сава Гроздев[1], Веселин Ненков[2], Татяна Маджарова[2]
[1] Висше училище по застраховане и финанси
кв. Овча купел, ул. „Гусла“ № 1, 1618 София
[2] Висше военноморско училище „Н. Й. Вапцаров“
ул. „Васил Друмев“ № 73, Варна, България
Автор за кореспонденция: v.nenkov@nvna.eu

ANOTHER SUMMARY OF MARION'S THEOREM

Sava Grozdev, Veselin Nenkov, Tatyana Madjarova

Abstract. *Marion's theorem concerns a specially constructed hexagon in the plane of a given triangle. A generalization of this theorem is shown in [1],* *which is in turn summarized in this paper. The generalizations, as well as the original, were obtained using the Geometer's Sketchpad program.*

Key words: Triangle, Intersection Points, GSP.