ЕДНО ЗАНЯТИЕ ВЪРХУ ДОПИРАТЕЛНИ КЪМ КРИВИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН В ПРОФИЛИРАНАТА ПОДГОТОВКА ПО МАТЕМАТИКА

Даниела Георгиева, Марта Теофилова

Резюме. *В настоящата работа предлагаме идеи за провеждане на занятие върху темата „Допирателни към криви от втора степен“ в профилираната подготовка по математика. Представените задачи имат за цел да надградят и разширят основните знания за аналитично задаване на допирателна в точка от дадена крива, и да се реализират вътрешно предметни връзки чрез прилагане на знания по алгебра и геометрия от общообразователната подготовка.*

Ключови думи: крива от втора степен, конично сечение, допирателна.

Въведение

Съгласно действащите учебни програми, допирателни към криви от втора степен (конични сечения) се изучават от учениците в профилираната подготовка по математика в 12. клас. Двете основни задачи, които учениците трябва да се научат да решават, са:

1) да задават чрез уравнение единствената допирателна в произволна точка от дадена крива;
2) да задават уравненията на двете допирателни през точка, нележаща върху кривата (ако те съществуват).

За определянето на допирателна през точка от крива в учебната литература са дадени готови формули – уравнения, с които учениците работят сравнително лесно. Затруднения възникват, когато се построяват допирателни от външна точка за разглежданата крива. Поради тази причина считаме, че са необходими разнообразни задачи за усъвършенстване на математическата подготовка на учениците. Тъй като в учебниците са заложени ограничено количество примери и типове задачи, предлагаме настоящата разработка с идеята тя да надгради и разшири познанията на учениците за допирателни към конични сечения. В работата са представени задачи, обособени в четири тематични групи, с решения, коментари и указания с цел консолидиране на знанията и усъвършенстване на уменията за аналитично задаване и изучаване на прави, допиращи се до окръжност, елипса, хипербола и парабола.

Считаме, че настоящата статия може да бъде полезна на учители по математика и ученици от профилираната подготовка за задълбочаване на техните познания и подготовка за ДЗИ.

В работата ще използваме следните известни формули (Таблица 1) и твърдения [2, 6].

Таблица 1. Уравнения на допирателни към конични сечения

Уравнение на крива от втора степен	Уравнение на допирателната в произволна точка $M(x_0; y_0)$ от кривата	Условие правата $l:\ Ax+By+C=0$ да се допира до кривата
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **елипса** с фокуси $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, където $a>b>0$, $c^2=a^2-b^2$	$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$	$a^2A^2+b^2B^2=C^2$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **хипербола** с фокуси $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, където $a,b>0$, $c^2=a^2+b^2$	$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$	$a^2A^2-b^2B^2=C^2$
$y^2=2px$ **парабола** с фокус $F(\frac{p}{2};0)$ и директриса $g: x=-\frac{p}{2}$	$y_0y=p(x+x_0)$	$pB^2=2AC$
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ **окръжност** с център $C(a;b)$ и радиус $R>0$	$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2$	$(aA+bB+C)^2=(A^2+B^2)R^2$

Твърдение 1. Правата $l:\ Ax+By+C=0$ се допира до:

а) елипса, точно когато $a^2A^2+b^2B^2=C^2$;

б) хипербола, точно когато $a^2A^2-b^2B^2=C^2$;

в) парабола, точно когато $pB^2=2AC$.

I група. Задачи за намиране допирателни към криви от втора степен по дадени условия за допирателните

В тази група разглеждаме задачи с най-често срещаните допълнителни условия за определяне на допирателни към криви от втора степен – да минават през дадена точка или да бъдат със специално разположение спрямо дадена права (например, успоредни или перпендикулярни на правата). В първата задача предлагаме на учениците двата основни метода за намиране на уравненията на допирателни към крива от втора степен през външна за кривата точка – чрез използване на готовата формула за уравнение на допирателна в точка от кривата и намиране на точките на допиране, както и чрез задаване на търсените допирателни с декартово уравнение, в което участва неизвестен ъглов коефициент, и свеждане до изследване на квадратно уравнение с параметър.

Задача 1. [5] Намерете дължината и уравнението на допирателната t през точката $A(0;-1)$ към окръжността $k:\ x^2+y^2-10x+2y+10=0$.

Решение. Най-напред определяме координатите на центъра C и радиуса на окръжността чрез допълване на лявата страна на уравнението до точен квадрат. Така получаваме $(x-5)^2+(y+1)^2=16$, т.е. $C(5;-1)$ и $R=4$. Намираме разстоянието между точките C и A, $\mid \vec{CA} \mid = 5 > R$, откъдето следва, че точка A е външна за окръжността и през нея минават две допирателни към окръжността. За намиране на дължините на допирателните разглеждаме правоъгълния $\triangle TAC$, където T е точката на допиране на една от двете допирателни и окръжността. Чрез питагорова теорема установяваме, че $TA=3$.

I начин. Използваме известната формула за уравнение на допирателна във фиксирана точка $T(x_0;y_0)$ от окръжност. Уравнението на допирателната в T към дадената окръжност е $(x_0-5)(x-5)+(y_0+1)(y+1)=16$. От условието, че точката $A(0;-1)$ лежи на тази допирателна получаваме

$$(x_0-5)(0-5)+(y_0+1)(-1+1)=16. \tag{1.1}$$

Освен това T лежи и на дадената окръжност, т.е.

$$(x_0-5)^2+(y_0+1)^2=16. \tag{1.2}$$

Чрез решаване на системата от уравненията (1) и (2), намираме координатите на двете допирни точки $T_1\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{7}{5}\right)$ и $T_2\left(\dfrac{9}{5};-\dfrac{17}{5}\right)$. Оттук лесно се установява, че уравнението на допирателната в T_1 е $t_1:\ 4x-3y-3=0$, а на допирателната в T_2 е $t_2:\ 4x+3y+3=0$.

II начин. За намирането на уравнението на допирателните през A можем да използваме уравнение на права през фиксирана точка $(x_1;y_1)$ с неизвестен ъглов коефициент k. Преди това, чрез непосредствена проверка установяваме, че правата през A, успоредна на Oy, т.е. самата ос Oy не се допира до окръжността. Така имаме следните уравнения за допирателните през A,

$$t:\ y-y_1=k(x-x_1) \Longleftrightarrow y+1=k(x-0) \Longleftrightarrow t: kx-y-1=0.$$

За да бъдат правите t допирателни към дадената окръжност, трябва системата от уравненията на правите t и окръжността да има единствено решение. Чрез изразяване на y от уравнението на t и заместване в уравнението на окръжността достигаме до следното квадратно уравнение с параметър $(k^2+1)x^2-10x+9=0$. Това уравнение има един двоен корен, точно когато дискриминантата му е равна на нула. Имаме $D=64-36k^2=0$, откъдето $k=\pm\frac{4}{3}$ и достигаме до уравненията на допирателните.

III начин. За допирателните отново използваме декартово уравнение $t:\ kx-y-1=0$, а също и че тъй като кривата е окръжност, то разстоянието от центъра C до допирателните е $R=4$. Тогава

$$\left|\frac{5k+1-1}{\sqrt{k^2+1}}\right|=4 \Longleftrightarrow 4\sqrt{k^2+1}=5|k|,$$

т.е. $k=\pm\frac{4}{3}$.

С прилагане на първите два начина за решаване на Задача 1, предлагаме на учениците да решат следните аналогични задачи за намиране на уравненията на двете допирателни през точка, нележаща на кривата, когато кривата е елипса, хипербола или парабола.

Задача 2. [3] Намерете допирателните към елипсата $x^2+9y^2=9$, минаващи през точката $A(5;0)$.

Решение. За определяне на броя на допирателните през дадена точка към елипса, на учениците може да се даде следното определение. Точка $M(x_0;y_0)$ се нарича външна за елипса, ако $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}>1$. Първо установяваме, че точката A е външна за дадената елипса и следователно през нея минават две допирателни към кривата. Използвайки I начин или II начин от Задача 1, уравненията на допирателните са

$$t_1:\ x-4y-5=0,\quad t_2:\ x+4y-5=0.$$

Задача 3. [4] Намерете уравненията на допирателните към хиперболата $x^2-4y^2=16$, минаващи през точката $A(0;-2)$.

Решение. Аналогично на Задача 2, на учениците може да се даде определението, че точка $M(x_0;y_0)$ се нарича външна за дадена хипербола, ако $\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}<1$. Така те установяват, че точка A е външна за дадената хипербола. Съгласно I начин от Задача 1, уравнението на допирателна към хиперболата в точка $(x_0;y_0)$ от хиперболата е $t:\ \dfrac{xx_0}{16}-\dfrac{yy_0}{4}=1$. Тъй като дадената точка лежи на t имаме $y_0=2$. Освен това $x_0^2-4y_0^2=16$, т.е. $x_0=\pm4\sqrt{2}$. Уравненията на двете допирателни са $t_{1,2}:\ \pm\sqrt{2}x-2y-4=0$.

Задача 4. [1] Намерете уравненията на допирателните към параболата с $y^2=36x$, минаващи през точка $A(2;9)$.

Решение. Даваме определението: точка $M(x_0; y_0)$ е външна за парабола, ако $y_0^2 > 2px_0$ (при $p > 0$). Тъй като точката A е външна за дадената парабола, то през нея минават две допирателни. Техните уравнения са $t_1 : 3x - y + 3 = 0$ и $t_2 : 3x - 2y + 12 = 0$.

В следващите две задачи се търсят допирателни с условия за успоредност или перпендикулярност спрямо дадена права.

Задача 5. (авторска задача) Намерете допирателните към хиперболата $2y^2 - x^2 = 16$, които са успоредни на правата $6x + 12y + 5 = 0$.

Решение. Тъй като търсените допирателни са успоредни на дадената права, те имат общо уравнение от вида $t : x + 2y + m = 0$, където $m \in \mathbb{R}$. Решаваме задачата аналогично на II начин на Задача 1, т.е. за да се допира правата t до дадената крива, трябва системата от уравненията на кривата и правата да има едно единствено решение. Така установяваме, че търсените допирателни са:

$$t_1 : x + 2y + 4 = 0, \quad t_2 : x + 2y - 4 = 0.$$

Задача 6. (авторска задача) Намерете уравненията на допирателните към елипсата $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, които са перпендикулярни на ъглополовящата на I и III квадрант, и определете разстоянието между тях.

Решение. Ъглополовящата на I и III квадрант е правата $y = x$. Тогава търсените допирателни имат уравнения от вида $t : x + y + m = 0$, $m \in \mathbb{R}$. По аналогичен начин както в предходната задача, достигаме до квадратно уравнение с параметър m, чиято дискриминанта $D = 144(25 - m^2)$ трябва да бъде равна на нула. Оттук намираме $m = \pm 5$. Следователно уравненията на търсените прави са $t_1 : x + y + 5 = 0$ и $t_2 : x + y - 5 = 0$. За намиране на разстоянието между тях, избираме произволна точка от една от правите, например $(0; -5) \in t_1$ и чрез формулата за разстояние от точка до права и намираме $d(T, t_2) = 5\sqrt{2}$.

Идеите от предходните задачи могат да бъдат приложени в задачи, комбиниращи знанията за допирателни със знанията за скаларно произведение на вектори от 11. клас или знания от общообразователната подготовка по математика.

Задача 7. (авторска задача) Дадени са точката $A(-2; 2)$ и хиперболата $x^2 - 4y^2 = 4$. Намерете лицето на триъгълника, образуван от A и допирните точки на допирателните през А към кривата.

Решение. Първо намираме координатите на допирните точки, аналогично на Задача 3. Така получаваме $B(-2;0)$ и $C\left(\frac{10}{3};-\frac{4}{3}\right)$. Учениците познават различни начини за пресмятането на лицето на триъгълник с върхове, зададени с координати: чрез формулата с дължини на две страни и синус на ъгъла между тях; чрез намиране на височината към някоя от страните на триъгълника; чрез намиране дължините на страните му и други. Тук първо предлагаме на учениците да докажат следната формула за лице на триъгълник, в която участва скаларно произведение. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са два неколинеарни вектора. Тогава лицето S на триъгълника, определен от $\vec{a}$ и $\vec{b}$, е

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2}.$$

Верността на последното равенство се установява от познатата на учениците формула за лице на триъгълник

$$S = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})}{2}$$

чрез повдигане в квадрат на двете ѝ страни и използване на свойствата на скаларното произведение на вектори. Тогава за векторите $\vec{a} = \vec{AB}(0;-2)$ и $\vec{b} = \vec{AC}\left(\frac{16}{3};-\frac{10}{3}\right)$ пресмятаме $S = \frac{16}{3}$.

Задача 8. (авторска задача) Намерете ъгъла, под който параболата $y^2 = 16x$ се вижда от точката $A(-1;0)$.

Ъгълът, под който крива от втора степен се вижда от дадена външна за нея точка A, е ъгълът между двете допирателни през A, който съдържа кривата.

Решение. Първо установяваме, че през точка A минават две допирателни към параболата с уравнения

$$t_1 : 2x + y + 2 = 0, \quad t_2 : 2x - y + 2 = 0,$$

които се допират до кривата съответно в точките $T_1(1;-4)$ и $T_2(1;4)$. Тогава намираме ъгъла, под който кривата се вижда от A, чрез $\cos\angle(\vec{AT_1}\vec{AT_2}) = -\frac{3}{5}$.

Задача 9. (авторска задача) Намерете лицето на квадрат, описан около елипсата с уравнение $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{7} = 1$.

Решение. Върховете на квадрата лежат върху координатните оси и са симетрично разположени относно координатното начало. Следователно техните координати са $(\pm m;0)$ и $(0;\pm m)$, $m > 0$. Тогава една от страните на квадрата има уравнение $t : x + y - m = 0$. От условието тази права да се допира до елипсата намираме $m = 3$. Следователно диагоналите на квадрата имат дължина 6, откъдето лицето му е $S = 18$.

II група. Задачи за намиране на уравнението на крива от втора степен по дадени условия за допиране

В тази група предлагаме обратния тип задачи на I група – намиране на аналитичното задаване на крива от втора степен при дадени условия за прави, допиращи се до нея.

Задача 10. [3] Намерете уравнението на:

а) елипса, допираща се до правите $x + y - 5 = 0$ и $x + 4y - 10 = 0$;

б) хипербола, допираща се до правите $x = 1$ и $5x - 2y + 3 = 0$.

Решение. а) Нека търсената елипса е $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Съгласно Твърдение 1, дадените прави се допират до елипсата, точно когато

$$a^2 + b^2 = 25 \quad \text{и} \quad a^2 + 16b^2 = 100.$$

Решавайки системата от двете уравнения, намираме $b^2 = 5$, $a^2 = 20$. Търсената крива е $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.

б) С аналогични разсъждения намираме уравнението на хиперболата $4x^2 - y^2 = 4$.

Задача 11. [3] Правата $x - y - 5 = 0$ се допира до елипса с фокуси $(-3; 0)$ и $(3; 0)$. Намерете уравнението на елипсата.

Решение. Нека търсената елипса е $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Съгласно условието дадената права да е допирателна имаме $a^2 + b^2 = 25$. Освен това $c^2 = 9 = a^2 - b^2$. Така получаваме $a^2 = 17$, $b^2 = 8$ и търсената крива е $\dfrac{x^2}{17} + \dfrac{y^2}{8} = 1$.

Задача 12. (авторска задача) Намерете уравнението на парабола, разположена симетрично относно права, успоредна на Оу, ако параболата пресича координатните оси в точките $(1; 0)$ и $(0; -3)$ и се допира до правата $3x+y+5 = 0$.

Решение. Параболата има уравнение от вида $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, като е симетрично разположена относно правата $x = -\frac{b}{2a}$. Търсим неизвестните коефициенти a, b и c от уравнението. От координатите на дадените точки от кривата, имаме $f(1) = a + b + c = 0$ и $f(0) = c = -3$, откъдето $b = 3 - a$ и $c = -3$. За да бъде дадената права допирателна към параболата, системата от уравненията на кривата и правата трябва да има единствено решение. Отчитайки и вече намерените зависимости за коефициентите в уравнението на параболата, достигаме до следното квадратно уравнение $ax^2+(6-a)x+2 = 0$. Дискриминантата му е равна на нула при а=2 и а=18. Решение на задачата са двете параболи: $y = 2x^2+x-3$, която се допира до дадената права в точката $(-1;-2)$, и $y = 18x^2 - 15x - 3$, която се допира в точката $(\frac{1}{3};-6)$.

III група. Задачи за двойки криви – намиране на допирателни в общи точки на две криви

Задача 13. (авторска задача) Докажете, че кривите

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$$

се пресичат и намерете ъгъла между допирателните към тях в общите им точки (ъгъл между две пресичащи се криви).

Решение. Съставяме системата от уравненията на двете криви и установяваме, че общите им точки са $(4;1)$, $(4;-1)$, $(-4;1)$, $(-4;-1)$, които са симетрично разположени относно координатните оси. Достатъчно е да определим ъгъла между допирателните в една от тях. В точката $(4;1)$ допирателната към елипсата е $x+y-5=0$, а към хиперболата е $x-y-3=0$. Установяваме, че двете прави определят прав ъгъл.

IV група. Задачи с доказателствен характер

На учениците предлагаме да формулират обобщения на някои от разгледаните дотук задачи. По идея на Задача 6 да намерят допирателните към произволна елипса, успоредни на ъглополовящата на I и III квадрант (или II и IV квадрант). По идея на Задача 9 предлагаме да намерят лицето на квадрат, описан около произволна елипса или да докажат, че лицето му е $S = 2(a^2 + b^2)$ (това е квадратът, определен от четирите прави от обобщението на Зад. 6). По идея на Задача 13 предлагаме следната

Задача 14. (авторска задача) Намерете необходимо и достатъчно условие за елипса и хипербола с обща фокална ос да се пресичат под прав ъгъл.

Решение. Нека уравненията на двете криви са

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1,$$

като Ox е общата им фокална ос, и $M(x_0;y_0)$ е тяхна обща точка (необходимо и достатъчно условие кривите да се пресичат е $a > m$). Нека двете криви се пресичат под прав ъгъл. Допирателните към кривите в M, т.е. правите

$$b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2 \quad \text{и} \quad n^2x_0x - m^2y_0y = m^2n^2,$$

са перпендикулярни, точно когато

$$b^2n^2x_0^2 - a^2m^2y_0^2 = 0.$$

От условията, че M лежи на двете криви, след изразяване на y_0 и заместване в последното равенство, получаваме съответно

$$(a^2 - b^2)x_0^2 = a^2m^2 \quad \text{и} \quad (m^2 + n^2)x_0^2 = a^2m^2.$$

Тогава $a^2 - b^2 = m^2 + n^2$. Следователно кривите имат общи фокуси (наричат се съфокусни криви). Обратно, ако фокусите на елипсата и хиперболата съвпадат, по аналогичен начин се доказва, че допирателните към тях в общите им точки са перпендикулярни.

В заключение отбелязваме, че всяка допирателна е свързана с геометричната структура на кривата и с алгебрично ѝ уравнение. Затова намирането на допирателни съдейства за разкриване на фундаменталната връзка между уравнение и фигура, като развива знанията за конични сечения и уменията за работа с апарата на аналитичната геометрия.

Литература

[1] Х. Вулов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, София, 1992

[2] Д. Гълъбова, М. Сидерова, *Математика – 12. клас. Профилирана подготовка*, 2021, ISBN: 978-954-8857-55-0

[3] В. Клетеник, *Сборник задач по аналитической геометрии*, Наука, Москва, 1980

[4] П. Паскалев, К. Димитрова, Ц. Дончев, *Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика*, Архимед, София, 2006, ISBN: 954-779-059-5

[5] Е. Русев, *Математика – елементи от линейната алгебра и аналитична геометрия*, Университетско издателство „Паисий Хилендарски", Пловдив, 2007, ISBN: 978-954-423-402-7

[6] Г. Станилов, А. Борисов, *Нови срещи с коничните сечения*, „Народна просвета", София, 1988

Даниела Георгиева[1], Марта Теофилова[2]
[1] ПМГ „Академик Боян Петканчин", Хасково, България
[2] Пловдивски университет „Паисий Хилендарски",
Факултет по математика и информатика,
бул. „България" № 236А, 4027 Пловдив
Автор за кореспонденция: danielatsvetkova17@gmail.com,
marta@uni-plovdiv.bg

A LESSON ON TANGETS TO SECOND DEGREE CURVES IN THE MATHEMATICS PROFILED TRAINING

Daniela Georgieva, Marta Teofilova

Abstract. *In the present work, we offer ideas for a lesson on the topic "Tangents to second degree curves" in the math profiled training. The presented problems aim to build on the basic knowledge on the topic of analytically setting a tangent at a point on a given curve, as well as to facilitate intra-subject relations by applying knowledge of algebra and geometry from the general mathematics training.*

Key words: Second Degree Curve, Conic Section, Tangent.